Granica funkcji – pojęcie granicy

Granica właściwa funkcji

Definicja 1. Zbiór $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ nazywamy *sąsiedztwem* punktu x_0 o promieniu $\delta > 0$ i oznaczamy symbolem $S(x_0, \delta)$.

Przedział $(x_0 - \delta, x_0)$ nazywamy *lewostronnym*, a przedział $(x_0, x_0 + \delta)$ *prawostronnym sąsiedztwem* punktu x_0 o promieniu $\delta > 0$ i oznaczamy odpowiednio: $S_-(x_0, \delta)$ oraz $S_+(x_0, \delta)$.

Niech funkcja $f : X \to Y$ będzie określona w pewnym sąsiedztwie S punktu x_0.

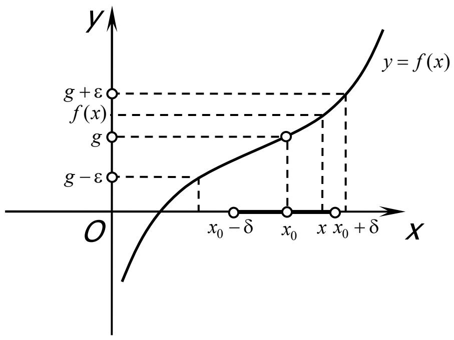
Definicja 2 (*granicy funkcji w punkcie według Heinego*).
Liczbę g nazywamy *granicą* (*właściwą*) funkcji f w punkcie x_0, co zapisujemy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach $x_n \in S$, zbieżnego do x_0, ciąg $(f(x_n))$ wartości funkcji jest zbieżny do g.

Zapiszemy jeszcze symbolicznie drugą definicję granicy funkcji w punkcie równoważną powyższej definicji.

Definicja 3 (*granicy funkcji w punkcie według Cauchy'ego*).

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x \in X} \left[0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon \right].$$

Ilustracją graficzną definicji 3 jest rysunek 1. Interpretujemy ją w sposób następujący: liczba g jest granicą funkcji f w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego otoczenia U punktu g o promieniu ε istnieje takie sąsiedztwo S punktu x_0 o promieniu δ, że dla każdego x należącego do tego sąsiedztwa ($x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$), wartości $f(x)$ funkcji f należą do *U,* czyli do przedziału $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$.



Rys. 1. Interpretacja definicji 3

Granice niewłaściwe oraz granice w nieskończonościach

Oprócz granicy właściwej (skończonej) funkcja może mieć granice niewłaściwe ($\pm\infty$). Dodatkowo można również obliczać granice w nieskończonościach, które także mogą być właściwe lub niewłaściwe. Ponadto funkcja może nie posiadać granicy. Podamy i zilustrujemy tutaj tylko wybrane definicje dotyczące wymienionych przypadków, a dodatkowo ograniczymy się do definicji według Cauchy'ego.

Niech funkcja $f : X \to Y$ będzie określona w pewnym sąsiedztwie punktu x_0.

Definicja 4 (*granic niewłaściwych funkcji w punkcie według Cauchy'ego*).

1° $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall_M \, \exists_{\delta>0} \forall_{x\in X} \left[0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < M \right].$

2° $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall_M \, \exists_{\delta>0} \forall_{x\in X} \left[0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M \right].$

Niech funkcja $f : X \to Y$ będzie określona w pewnym przedziale $(-\infty, a)$.

Definicja 5 (*granic funkcji w minus nieskończoności według Cauchy'ego*).

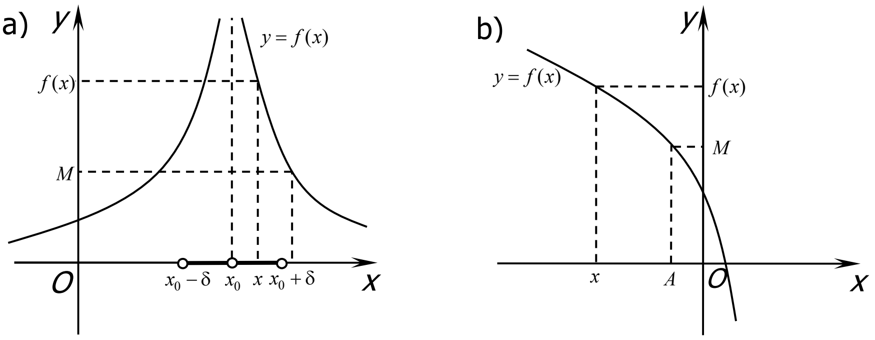
1° $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = g \quad \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} \, \exists_A \forall_{x\in X} \left[x < A \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon \right].$

2° $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall_M \, \exists_A \forall_{x\in X} \left[x < A \Rightarrow f(x) < M \right].$

3° $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall_M \, \exists_A \forall_{x\in X} \left[x < A \Rightarrow f(x) > M \right].$

Podobnie określamy granice w $+\infty$.

Na rysunku 2 można znaleźć ilustrację graficzną przypadku 2° definicji 4 oraz przypadku 3° definicji 5.



Rys. 2. Interpretacja: a) definicji 4 punkt 2°, b) definicji 5 punkt 3°

Oczywiście można również sformułować równoważne definicje odpowiednich granic według Heinego.

Granice jednostronne

Zajmiemy się teraz sytuacją, w której interesuje nas, co się dzieje z wartościami danej funkcji w przypadku, gdy x dąży do x_0 z określonej strony – prawej lub lewej. Mamy wówczas do czynienia z tzw. granicami jednostronnymi. Granice jednostronne mogą być zarówno właściwe, jak i niewłaściwe. Poniżej podamy tylko definicje granic jednostronnych właściwych według Cauchy'ego. Sformułowanie definicji granic jednostronnych niewłaściwych oraz odpowiednich definicji granic jednostronnych według Heinego pozostawiamy Czytelnikowi.

Niech funkcja $f : X \to Y$ będzie określona w lewostronnym sąsiedztwie S_- punktu x_0.

Definicja 6 (*granicy lewostronnej funkcji w punkcie według Cauchy'ego*).

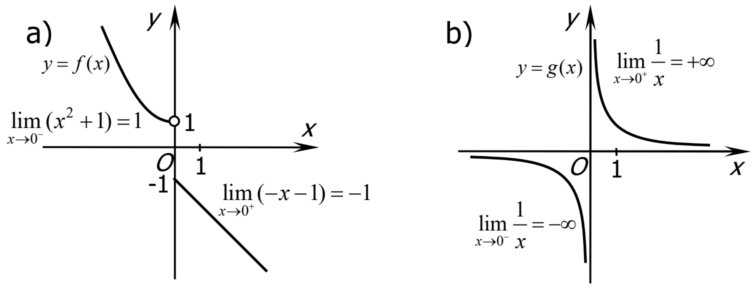
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = g_l \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{\delta>0}\forall_{x\in X}\left[x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow \left|f(x)-g_l\right|<\varepsilon\right].$$

Niech funkcja $f : X \to Y$ będzie określona w prawostronnym sąsiedztwie S_+ punktu x_0.

Definicja 7 (*granicy prawostronnej funkcji w punkcie według Cauchy'ego*).

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = g_p \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{\delta>0}\forall_{x\in X}\left[x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow \left|f(x)-g_p\right|<\varepsilon\right].$$

Jako ilustrację pojęcia granic jednostronnych rozważmy następujące funkcje: $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{dla } x<0 \\ -x-1, & \text{dla } x\ge 0\end{cases}$ oraz $g(x)=\dfrac{1}{x}$ o wykresach podanych na rysunku 3.



Rys. 3. Ilustracja pojęcia granic jednostronnych

Granice jednostronne tych funkcji w punkcie $x_0 = 0$ są odpowiednio równe:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1) = 1$, $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x-1) = -1$,

$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$.

Wybrane twierdzenia o granicach funkcji

Twierdzenie 1. Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę wtedy i tylko wtedy, gdy w tym punkcie istnieją obie granice jednostronne i są sobie równe, tzn.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \left[\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = g\right].$$

Twierdzenia dotyczące działań na granicach podamy w formie tabel

Tab. 1. Granica sumy i granica różnicy funkcji

$\lim\limits_{x\to x_0/\pm\infty} f(x)$ → $\lim\limits_{x\to x_0/\pm\infty} g(x)$ ↓	g	$+\infty$	$-\infty$	g	$+\infty$	$-\infty$
	$\lim\limits_{x\to x_0/\pm\infty}\left[f(x)+g(x)\right]$			$\lim\limits_{x\to x_0/\pm\infty}\left[f(x)-g(x)\right]$		
h	$g+h$	$+\infty$	$-\infty$	$g-h$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	s.n.	$-\infty$	s.n.	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	s.n.	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	s.n.

Rozważmy przykładowo następującą sytuację: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ oraz $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Z tabeli 1 łatwo odczytać, że:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+g(x)\right]=\left[-\infty+(+\infty)\right]=\left[-\infty+\infty\right]$$ – symbol nieoznaczony (s.n.),

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-g(x)\right]=\left[-\infty-(+\infty)\right]=\left[-\infty-\infty\right]=-\infty .$$

Tab. 2. Granica iloczynu i granica ilorazu funkcji

$\lim\limits_{x\to x_0,\pm\infty} f(x)$ → / $\lim\limits_{x\to x_0,\pm\infty} g(x)$ ↓		$g\neq 0$: $g>0$	$g\neq 0$: $g<0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$g\neq 0$: $g>0$	$g\neq 0$: $g<0$	0	$+\infty$	$-\infty$
		$\lim\limits_{x\to x_0,\pm\infty}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$					$\lim\limits_{x\to x_0,\pm\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$				
$h\neq 0$	$h>0$	$g\cdot h$		0	$+\infty$	$-\infty$	$\dfrac{g}{h}$		0	$+\infty$	$-\infty$
	$h<0$				$-\infty$	$+\infty$				$-\infty$	$+\infty$
0	0^+	0		0	s.n.	s.n.	$+\infty$	$-\infty$	s.n.	$+\infty$	$-\infty$
	0^-						$-\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$		$+\infty$	$-\infty$	s.n.	$+\infty$	$-\infty$	0	0	0	s.n.	s.n.
$-\infty$		$-\infty$	$+\infty$	s.n.	$-\infty$	$+\infty$	0	0	0	s.n.	s.n.

Z powyższej tabeli łatwo odczytać, że jeżeli na przykład $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$, to $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\left[0\cdot(-\infty)\right]$ – symbol nieoznaczony (s.n.),

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{-\infty}\right]=0 .$$

Warto również zapamiętać następujące przypadki:

$$\left[\frac{+}{0^+}\right]=+\infty,\qquad \left[\frac{+}{0^-}\right]=-\infty,\qquad \left[\frac{-}{0^+}\right]=-\infty,\qquad \left[\frac{-}{0^-}\right]=+\infty .$$

Twierdzenie 2 (*o granicy funkcji złożonej*).
Jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0$ i $\lim\limits_{y\to y_0} h(y)=g$, przy czym $f(x)\neq y_0$ dla każdego x z pewnego sąsiedztwa punktu x_0, to $\lim\limits_{x\to x_0} h(f(x))=\lim\limits_{y\to y_0} h(y)=g$.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch